

## CUPOLE – SUPERFICI DI RIVOLUZIONE

Le cupole sono strutture di chiusura difficilmente pensate e realizzate per sopportare un piano di calpestio, nel qual caso vengono infatti sostituite dalle cosiddette *volte a vela*, ossia delle cupole tagliate da quattro piani verticali mutuamente ortogonali. Questa condizione è uno dei motivi che induce a caratterizzarle quali strutture quasi prive di carichi accidentali.

Se confrontata con una copertura a tetto, che si qualifica come struttura leggera, la cupola presenta un peso proprio molto elevato e quindi un elevato rapporto tra carico-permanente e carichi accidentali, tale da consentire di trascurare i secondi. Riferendosi, a titolo esemplificativo, al carico dovuto al peso della neve, mentre per la cupola si può non tenerne conto (anche per la stessa configurazione geometrica che ne impedisce l'accumulo), nella progettazione di un tetto esso può rappresentare un incremento non trascurabile tale da determinare un sensibile aumento delle sollecitazioni che agiscono sulle parti portanti. E' possibile, per strutture molto leggere dimensionate secondo normativa (per la quale i carichi accidentali sono espressi da grandezze desunte da analisi statistiche, quindi valori medi) che il verificarsi di una nevicata eccezionale possa addirittura metterle in crisi perché il coefficiente di sicurezza a cui si è fatto riferimento non era sufficiente a garantire la tenuta anche in caso di eventi straordinari. Viceversa, in presenza di una struttura molto pesante, la variabilità del carico accidentale non incide molto sullo stato di sollecitazione; come già accennato nei capitoli precedenti, nelle strutture in muratura, quindi anche per la cupola (se così realizzata), bisogna fare i conti con il peso proprio e non con i carichi accidentali che potrebbero influire nella misura del solo 6+7%.

Stessa cosa dicasi per i carichi accidentali dovuti al vento: le azioni sulla cupola sono trascurabili, stante la configurazione aerodinamica della struttura, con scarse azioni di compressione sul fronte investito e di depressione su quello opposto.

### **Determinazione delle sollecitazioni – Analisi teorica**

Nella cupola lo spessore è una dimensione trascurabile rispetto alla luce e

all'altezza. Nella trave, invece, sono le dimensioni della sezione ed essere trascurabili rispetto alla luce. Per avere un ordine di grandezza delle dimensioni in gioco, si consideri che lo spessore medio di una cupola estradossata in una muratura di buona qualità varia da 30 a 50 cm. Ipotizzato un diametro di 20 metri, lo spessore accettabile di 50 cm indica un rapporto di 1/40. Circostanza, quest'ultima, che rende plausibile studiarne il comportamento ricorrendo alla sola superficie trascurando, cioè, lo spessore, in analogia alla trave, studiata assumendo la schematizzazione secondo la linea d'asse. Il calcolo delle sollecitazioni fatto riferendosi alla *superficie media* della cupola ne sposa effettivamente il comportamento, a meno della zona di appoggio dove, però, il complicarsi della situazione vanifica qualsivoglia tentativo di raffinatezza nei calcoli.

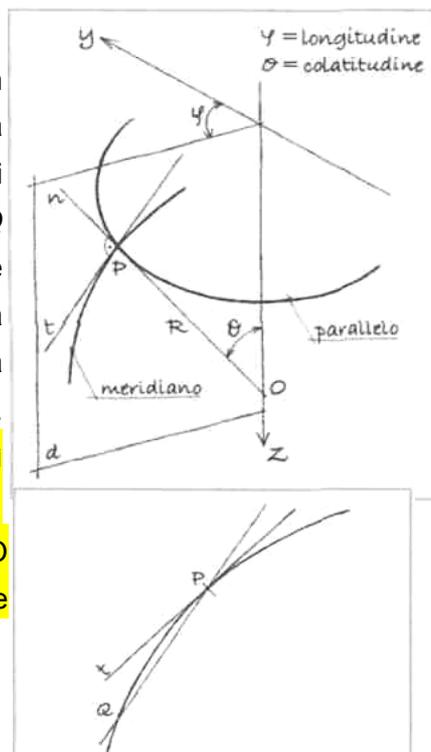
Fatta questa semplificazione del problema, lo studio della cupola, almeno per quel che riguarda un primo approccio, può essere affrontato con poca fatica, utilizzando la "teoria della membrana".

Si consideri una superficie membranale di rivoluzione (rappresentativa della maggioranza delle cupole, ad esclusione di quelle a pianta ellittica o policentrica) e si prenda un piano  $\alpha$  su cui tracciare una linea qualunque; facendo ruotare il piano intorno all'asse  $z$  (fascio di piani con asse di sostegno rappresentato dalla retta  $r$ ) la linea descrive una superficie di rivoluzione (fig. 1). Ogni punto  $P$  della suddetta linea, detta *meridiano*, nella rotazione descrive un cerchio di raggio  $r$  detto *parallelo*.

Per ogni punto  $P$  appartenente al piano  $\alpha$ , è possibile definire una tangente al meridiano e una normale alla tangente medesima.

(Fig.1)

Per definire la tangente si consideri un punto  $Q$  del meridiano posto ad una certa distanza da  $P$ , per i due punti passa una sola retta; spostando  $Q$  verso  $P$ , la retta si approssima sempre di più alla curva e al limite toccherà la stessa in un sol punto: la retta rappresenta allora la tangente (fig. 2). La normale alla tangente così individuata, passante per il punto  $P$ , incontra l'asse  $z$  in un punto  $O$  secondo un angolo indicato con  $\vartheta$ , che

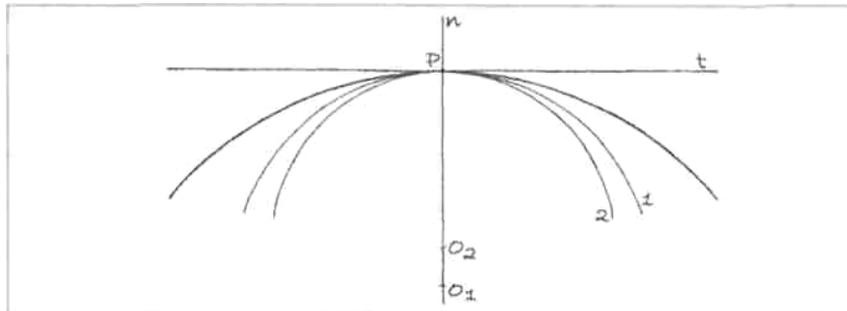


rappresenta la **colatitudine**, mentre la **latitudine** è data dal suo complementare. L'angolo  $\varphi$  tra il piano  $\alpha$  e il piano di riferimento del fascio, indica la **longitudine**.

Con  $R$  si indica la distanza del punto  $P$  dall'asse  $Z$  valutata lungo la normale alla tangente della curva nel punto  $P$ , spostando il punto cambia tutto avendo ogni punto del meridiano, a questo riguardo, una sua propria caratterizzazione.

E necessario ora introdurre un'altra grandezza intrinseca alla curva nel punto  $P$ .

Fig.3



Riferendosi alla fig.3. per i due archi di cerchio indicati con 1 – 2 la tangente e la sua normale nel punto  $P$  risultano coincidenti con quelli del meridiano; nell'intorno del punto  $P$  questo differisce, sebbene in modo diverso, dai cerchi per la **curvatura**. Per ogni punto  $P$  del meridiano la **curvatura** può essere quantificata attraverso l'individuazione del particolare cerchio, detto **osculatore** alla curva nel punto in esame.

Una qualsiasi curva, infatti, possiede, in ogni suo punto, un **cerchio osculatore**; quest'ultimo si definisce come il cerchio che più si approssima alla curva nell'intorno proprio del punto  $P$  e che può essere individuato con identica metodologia adottata per definire la tangente alla curva nel punto  $P$ .

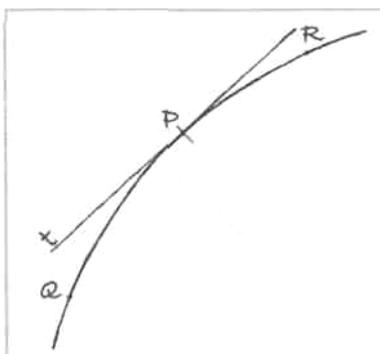


Fig.4

Riprendendo la figura 2, oltre al punto  $Q$ , si consideri anche il punto  $R$ , posto sempre sulla curva, ad una certa distanza da  $P$  e si individui l'unico cerchio che passa per questi tre punti. Quello disegnato non è però il cerchio osculatore cercato, è il cerchio che passa per

quei tre punti ma non sposa la curva nell'intorno di  $P$ . Facendo tendere al limite  $Q$  ed  $R$  verso  $P$  si ottiene sempre un unico cerchio; quando i tre punti coincidono tutti con  $P$ , il processo limite dà luogo al cerchio osculatore (fig. 4).

Pur essendovi infiniti cerchi che si approssimano alla curva, questi non ne sposano la configurazione quanto il cerchio osculatore che con essa si identifica nell'intorno del punto  $P$ ; il suo centro si posiziona sulla normale alla curva in  $P$  e il suo raggio chiamasi *raggio di curvatura*, mentre l'inverso definisce la curvatura nel punto  $P$ . Naturalmente cambiando  $P$ , si modificano tutte le grandezze a questo associate.

Per meglio comprendere, si consideri che se la curva meridiana di partenza fosse rappresentata da una retta (superficie di rivoluzione ridotta a un cono), per ogni suo punto il raggio di curvatura sarebbe infinito, con centro del cerchio osculatore improprio e curvatura nulla.

Oltre alla linea che individua il meridiano si consideri la linea passante sempre per il punto  $P$  ma giacente su un piano che contiene la normale al punto  $P$  ed è ortogonale al piano  $\alpha$ . Il nuovo piano andrà a sezionare la superficie di rivoluzione secondo un'altra linea e, quindi, nel punto  $P$  vi sarà un'altra curvatura caratterizzante la superficie nell'intorno del punto stesso (fig. 5). Per ogni punto  $P$  si prenderanno in considerazione il raggio di curvatura del meridiano e quello di questa nuova linea: i due raggi di curvatura giacciono entrambi sulla normale per  $P$  alla superficie, ma sono relativi a due curve diverse.

In conclusione, una superficie di rivoluzione intorno all'asse  $z$ , è caratterizzata dalla linea direttrice, detta curva meridiana. In ogni punto  $P$  della superficie sono definiti: il raggio di curvatura  $R_m$  della meridiana e il raggio di curvatura della curva a questa ortogonale,  $R_p$ . Il centro di curvatura  $O_m$  del meridiano può variare mentre l'altro,  $O_p$ , giace sempre sull'asse  $z$  di rivoluzione.

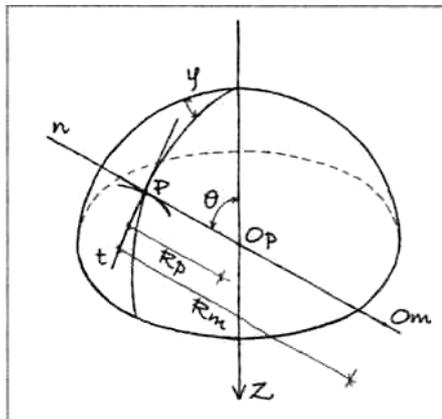


Fig.5

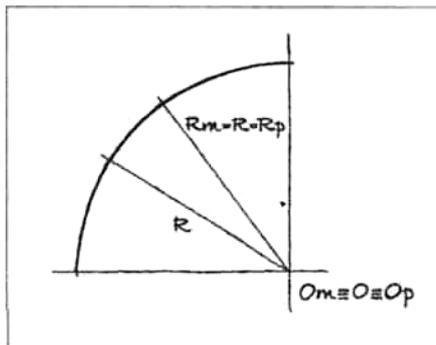
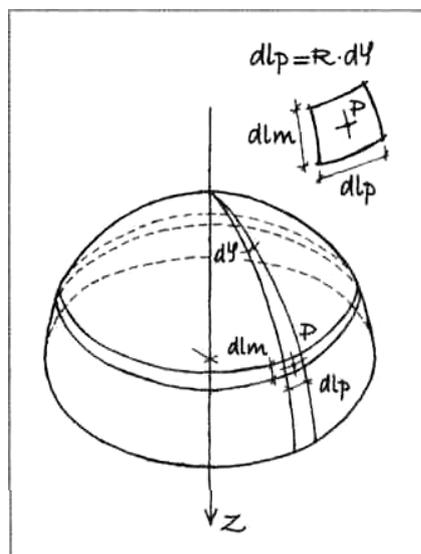


Fig.6

Ma esiste una **superficie di rivoluzione** che semplifica molto i termini del problema? Nella **superficie semisferica** (meridiano rappresentato da un quarto di cerchio), comune alla forma di molte cupole,  $R_m$  e  $R_p$  sono **costanti** per ogni punto della meridiana e **coincidenti con  $R$** ; i centri di curvatura si sovrappongono al centro **O** della meridiana circolare (fig. 6). **Da tenere presente che sulle superfici di rivoluzione esiste una simmetria rispetto ai piani passanti per l'asse z: l'angolo  $\varphi$ , la longitudine, non influisce sulla definizione geometrica; pur variando il valore dell'angolo  $\varphi$ , la meridiana rimane sempre la stessa.** Questa considerazione consente di affermare che tutte le grandezze geometriche di cui si tiene conto non risultano dipendere da  $\varphi$ , ma esclusivamente dall'angolo  $\theta$  o dalla quota secondo z. Se ne deduce che se anche i carichi rispettano quella simmetria, tutte le grandezze, anche statiche, non dipenderanno da  $\varphi$ . I carichi, come già rilevato, sono essenzialmente dovuti al peso proprio, per cui quelli accidentali, non necessariamente simmetrici, possono essere trascurati. **Pertanto, una superficie di rivoluzione rappresentativa di una cupola di muratura che, geometricamente, dà luogo ad una situazione con infiniti piani di simmetria passanti per z, possiede anche una simmetria statica.** Tutte le grandezze meccaniche necessarie per valutare lo stato di sollecitazione di una cupola sono rappresentabili in un piano contenente il meridiano, le loro grandezze scalari rimangono invariate al variare di  $\varphi$ , mentre quelle vettoriali sono influenzate dal variare della direzione; muovendosi invece su una medesima meridiana, le caratteristiche meccaniche varieranno da punto a punto e saranno quindi funzione di  $\theta$ .

### Studio statico di una cupola



Preso un qualunque meridiano ed un punto  $P$  su di esso, quali sono le caratteristiche di sollecitazione nell'intorno di quel punto?

Si considerino due piani meridiani molto vicini tra loro e si indichi con  $d\varphi$  la variazione infinitesima di longitudine; inoltre si individuino due piani paralleli che taglino la cupola secondo due cerchi a distanza relativa infinitesima. Si individua così un elementino infinitesimo di superficie (fig.7)

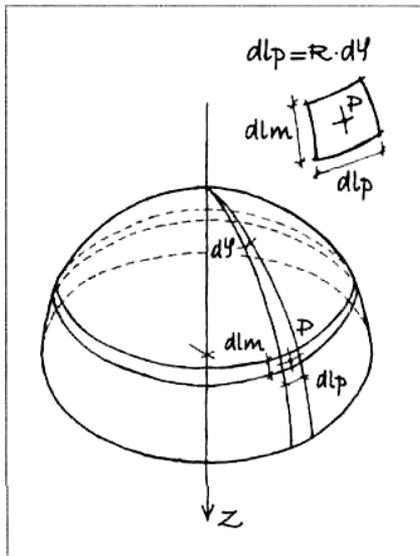


Fig.7

Quali sono le forze esterne agenti su questo elementino?

Da ricordare che la struttura in argomento è di spessore modesto, assimilabile ad una membrana, in grado di opporre una certa resistenza ad eventuali sollecitazioni per il fatto di possedere rigidzze nei riguardi di queste: la mancanza di rigidzza corrisponde infatti ad una mancanza di capacità reattiva. A tal riguardo l'esempio

di un filo da cucito può rendere l'idea: avvicinando i due estremi non si avverte alcuna opposizione non possedendo il filo alcuna rigidzza in tal senso; viceversa se lo si tende si avverte una certa opposizione per la presenza di una rigidzza all'estensione. Il filo non ha una sua configurazione ma dipende dalle sollecitazioni a cui è sottoposto, la sua rigidzza impegna una risposta in termini soltanto di sforzo di trazione e non in termini flessionali o torsionali.

Per rispondere alla domanda di partenza, si consideri una piccola porzione di cartoncino: non può opporre resistenza alle sollecitazioni flessionali o torsionali, mentre è in grado di resistere a trazione, taglio e compressione, naturalmente se non si verificano fenomeni di instabilità di equilibrio per perdita di configurazione.

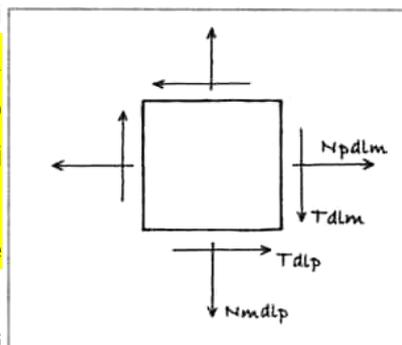


Fig.8

Ritornando alla cupola si ha la stessa situazione in cui la stabilità di configurazione è abbastanza garantita dalla doppia curvatura. Con

l'elementino di figura 8 , se la membrana viene caricata, **le grandezze reattive da determinare sono le seguenti:**

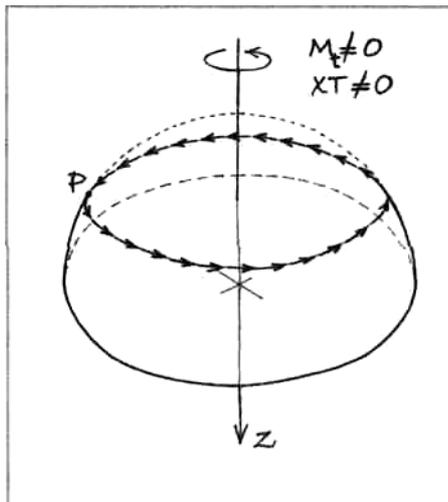
$N_p$ , sforzo sull'unità di lunghezza del meridiano;

$N_m$ , sforzo sull'unità di lunghezza del parallelo;

$T$ , sforzo unitario di taglio.

Per quel che riguarda il **taglio  $T$** , partendo dalle considerazioni di superficie di rivoluzione simmetrica anche nei carichi, si può dimostrare che questo **è nullo**. Riferendosi ad una trave appoggiata uniformemente caricata, senza fare alcun calcolo, considerando esclusivamente la natura emisimmetrica del taglio, **in mezzeria l'unico valore** di  $T$  che consente di rispettare questa condizione, nonché la simmetria del carico e quella della struttura, non può che essere zero. In altri termini, dato che la reazione dei vincoli è pari alla metà del carico simmetrico che agisce sulla trave, il taglio, quale somma delle forze parallele alla sezione considerata, **in mezzeria è nullo**.

Fig.9



Per la cupola è possibile fare analoghe considerazioni: sul parallelo che passa per un determinato punto  $P$ , data la simmetria dei carichi, il taglio è rappresentato da forze tutte della medesima intensità e segno (fig. 9). L'insieme di queste forze unitarie moltiplicate per la lunghezza  $dl_p$ , dovranno costituire un sistema auto-equilibrato dato che le forze attive agenti, per loro simmetria, sono a

componente orizzontale nulla. Attraverso il poligono delle forze elementari  $Tdl_p$  si ottiene una risultante nulla: la verifica dell'equilibrio delle componenti orizzontali è positiva mentre non è verificata la condizione di momento torcente nullo intorno all'asse di rivoluzione. **Unico valore di  $T$  compatibile con queste considerazioni è che sia nullo**. Naturalmente il taglio  $T$  assumerebbe un valore diverso da zero solo se le forze attive esterne non rispettassero la simmetria.

Nelle ipotesi fatte, **le uniche incognite** da determinare sono quindi  **$N_p$  ed  $N_m$**  che, in termini scalari, non dipendono dalla longitudine.

Riassumendo (figg. 10 e 11 ): per un qualsiasi punto  $P$  di una superficie di rivoluzione è individuabile **la meridiana, la normale alla tangente a questa**

che interseca l'asse di rivoluzione  $z$  in  $O_p$ , e l'angolo  $\theta$ ; inoltre, sempre per il punto  $P$ , è stato definito il raggio  $r$  della circonferenza (parallelo); infine il raggio della curvatura della meridiana ( $R_m$ ) ed il raggio di curvatura di quella curva ortogonale alla meridiana ( $R_p$ ). Tra  $R_p$  ed  $r$  vale la relazione:  $r = R_p \sin \theta$

Fig.10

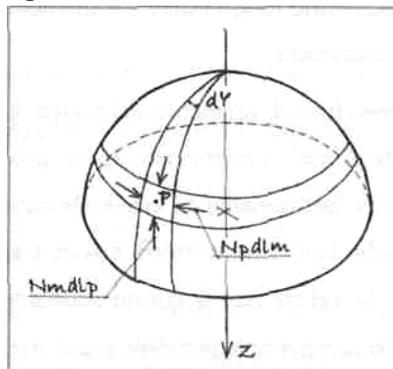
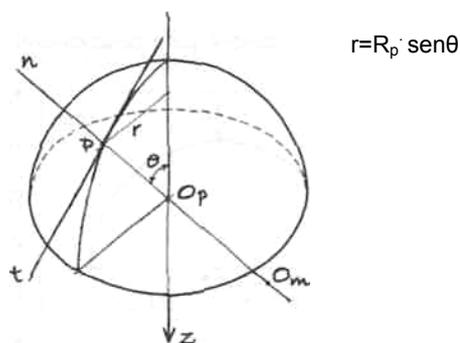


Fig.11



Premesso quanto sopra, si determini ora  $Nm$ .

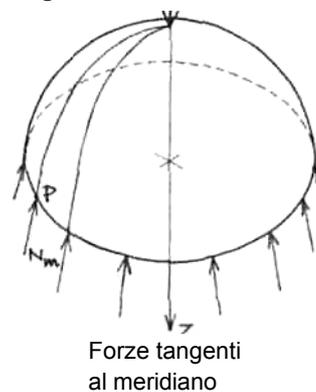
Nello studio dell'equilibrio di un corpo le forze in gioco sono tutte e sole quelle esterne, è necessario, quindi, così come è prassi operare nel caso di una trave, esternare le sollecitazioni (forze interne al corpo) dividendo la struttura in due parti e mettendone in equilibrio una.

Nel caso in esame, per calcolare l'intensità  $Nm$  alla quota di  $P$ , che si è detto essere indipendente

da  $\theta$ , basterà tagliare la cupola con un piano passante per  $P$  ortogonale all'asse  $z$  e mettere in equilibrio esclusivamente la parte superiore (fig. 12). Per fare ciò è necessario individuare tutte le forze esterne che agiscono su questo settore della membrana:

i carichi reattivi  $Nm$ , forniti dalla parte inferiore di cupola che stata tralasciata, e i carichi attivi agenti sulla parte superiore di cui si studia l'equilibrio.

Fig.12



Qual è la direzione più conveniente, rispetto alla quale imporre l'equilibrio?

Considerando l'asse ortogonale a  $z$ , per l'equilibrio scalare, si otterrebbe un risultato noto, ovvero che tutte le componenti di  $Nm$  secondo questa

direzione si elidono a vicenda, mentre imponendo l'equilibrio lungo l'asse z è possibile avere informazioni sulle componenti di  $N_m$  secondo z.

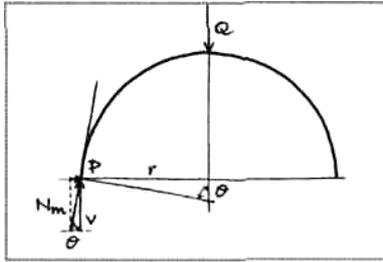


Fig.13

Nell'ipotesi fatta di simmetria del carico, la risultante di tutti i carichi attivi (peso proprio, carico permanente ed eventuale carico accidentale simmetrico) passa per l'asse z.

Si indichi con  $Q$  questa risultante e con  $V$  la componente parallela a z di  $N_m$ , ovvero la componente dello sforzo unitario che si esercita lungo il parallelo, costante lungo tutto il parallelo. Osservando la figura 13), la forza totale reattiva lungo z sarà data da:

$$V 2\pi r = N_m \sin\theta 2\pi r$$

per l'equilibrio

$$Q - N_m \sin\theta 2\pi r = 0$$

$$N_m \sin\theta 2\pi R_p \sin\theta = Q$$

$$N_m(\theta) = \frac{Q(\theta)}{2\pi R_p(\theta) \sin^2\theta}$$

Come più volte ricordato,  $N_m$  è lo sforzo unitario, per unità di lunghezza di parallelo, che passa per  $P$  lungo la direzione tangente al meridiano, con verso opposto a quello del carico: trattasi sempre di sforzo di compressione. Essendo  $Q$  ed  $R_p$  funzione di  $\theta$ , variando il punto  $P$  varia anche il valore di  $N_m$ ; nel caso però di membrana emisferica, o parte di questa, i termini del problema si semplificano poiché, pur variando  $\theta$ ,  $R_p$  rimane costante e uguale a  $R$ .

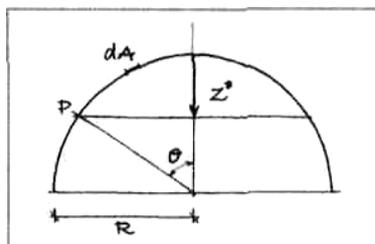


Fig. 14

Quanto vale  $N_m$  per una membrana emisferica ipotizzando, per semplicità, costante il peso proprio per unità di superficie? Osservando la figura per la calotta al di sopra p si avrà

$$dQ = \gamma s dA$$

(dove  $\gamma$  indica il peso specifico e  $s$  lo spessore della cupola).

Applicando la formula precedentemente definita

$$N_m = \frac{\gamma s 2 \pi R z^*}{2 \pi R \text{sen}^2 \theta}$$

con  $2 \pi R z^*$  superficie della calotta al di sopra della quota per  $P$  e dove  $z^*$  indica la saetta (distanza dal vertice alla base)

$$z^* = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$$

Pertanto

$$N_m = \frac{\gamma s 2 \pi R^2 (1 - \cos \theta)}{2 \pi R \text{sen} \theta} = \frac{\gamma s R (1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\gamma s R}{1 + \cos \theta}$$

con  $\theta = 0$  (in chiave)

$$N_m = \gamma s R/2$$

mentre all'imposta con  $\theta = \pi/2$

$$1 + \cos \theta = 1$$

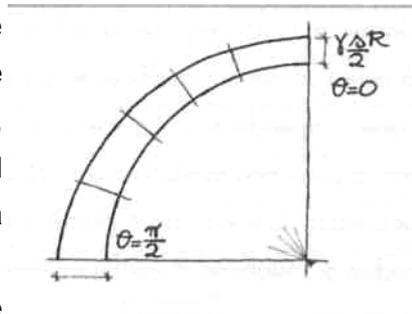
$$N_m = \gamma s R$$

Il valore di  $Nm$  è direttamente proporzionale ad  $R$  (più la cupola è grande, maggiore sarà lo sforzo), ma anche al peso specifico del materiale ed allo spessore della cupola. E' possibile rap

presentare la variazione che

subisce  $Nm$ , man mano che ci si sposta

dall'imposta verso la chiave, attraverso un diagramma polare in cui il valore della grandezza è rappresentato lungo i raggi (fig. 15).



**Fig.15**

Per avere un'idea degli sforzi a cui si allude, si consideri una cupola avente un diametro pari a  $20 m$ , uno spessore pari a  $50 cm$  ed un peso specifico pari a  $18 KN/mc$  ( $1,8 t/mc$ ).

In chiave

$$N_m = \frac{\gamma s R}{2} = \frac{1,8t/m^3 \cdot 0,5m \cdot 10m..}{2} = 4,5 t/m$$

all'imposta

$$N_m = \gamma s R = 1,8 \text{ t/m}^3 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 9 \text{ t/m}$$

con un valore delle  $\sigma$  ( **tensione**) assai modesto

$$\sigma = \frac{N_m}{A} = \frac{\gamma s R}{A} = \gamma R = 1,8 \text{ kg/cm}^2$$

E' possibile verificare che considerando un cilindro murario con spessore pari anch'esso a  $0,5 \text{ m}$ , ed una altezza di  $10 \text{ m}$  (pari al raggio della cupola in questione) la tensione alla base sar  espressa dalla medesima formula utilizzata per calcolare il valore della tensione all'imposta della cupola; ci  significa che l'azione verticale di una cupola emisferica   identica a quella esercitata da un muro la cui altezza coincide con il suo raggio.

Generalmente le cupole sono realizzate con grande cura e utilizzando materiali di buona qualit , questo fa s  che si possa contare su una resistenza pari almeno a  $30 \text{ dN/cm}^2$  che, se raffrontata con le  $\sigma$  dell'esempio, consentirebbe di avere un elevato coefficiente di sicurezza (maggiore di  $10$ ). Essendo la tensione indipendente dallo spessore, nel caso esaminato, anche uno spessore pari a  $20 \text{ cm}$  non avrebbe creato alcun problema, dato l'elevato coefficiente di sicurezza. Tuttavia non   giustificato adottare spessori molto piccoli, per il rischio di instabilit  di configurazione che ne pu  derivare.

Nel calcolo di  $N_m$  si   tenuto conto solo del peso proprio, tralasciando i carichi accidentali; si vuole ora dimostrare la validit  di tale scelta per lo modesta influenza di questi; a tal proposito si consideri, ad esempio, quello **dovuto alla neve**, assimilato ad un carico uniformemente distribuito sulla proiezione, sebbene in realt  si disponga in maniera non uniforme. Per un carico  $p=300 \text{ dN/mq}$  (assai elevato) si calcoli  $N_m$  che, contrariamente al peso proprio, non dipende da  $\theta$ , ma   costante:

$$N_m = \frac{Q(\theta)}{2\pi R \sin^2\theta} = \frac{p \pi (R \sin\theta)^2}{2\pi R \sin^2\theta} = \frac{p R}{2}$$

Per ogni qualsiasi metro di parallelo

$$N_m = \frac{(0,3 \text{ t/m}^2 \cdot 10 \text{ m})}{2} = 1,5 \text{ t/m}$$

$$N_m \quad 1,5 \text{ t/m}$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{3 \text{ t}}{(1 \text{ m}^2 \cdot 0,5 \text{ m})} = 3 \text{ t / m}^2 = 0,3 \text{ Kg / cm}^2$$

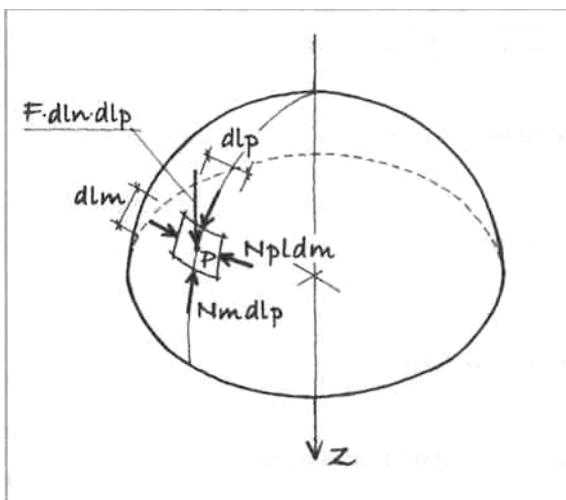
Per finire si ricordi, ancora una volta, che l'espressione

$$N_m = \frac{Q(\theta)}{2\pi R \sin^2\theta}$$

è valida per superfici di rivoluzione che rispettano la simmetria strutturale; membrane diverse, come quelle a pianta ellittica o policentrica presentano complicazioni comportamentali: possiedono un sistema di sollecitazione comparabile a quello che si instaura nelle cupole di rivoluzione circoscritte, ma subiscono sollecitazioni flessionali molto forti dovute alla tendenza a trasformare la configurazione ellittica in configurazione circolare. Trattandosi di strutture rigide ciò comporta, inevitabilmente, conseguenti tensioni di trazione che la muratura, per sua natura, non è in grado di sopportare; si generano così numerose fessurazioni liberatorie, non sempre preoccupanti.

L'altra grandezza statica, caratterizzante una membrana di rivoluzione, è rappresentata da  $N_p$ , forza unitaria che si esercita sull'unità di meridiano tangente al parallelo per  $P$ . Per la sua determinazione non è possibile adottare la stessa metodologia utilizzata per il calcolo di  $N_m$ , questo perché, sezionando la membrana con un piano meridiano, nell'equilibrio rispetto alla direzione ortogonale al piano medesimo appaiono infinite incognite: la parte sottratta, infatti, esercita sull'altra tutte le azioni  $N_p$  che si vuole conoscere; inoltre vi saranno le altre componenti dovute alle reazioni vincolari.

Fig.16



Nell'equilibrio si otterrebbe un'equazione in infinite incognite. Oltre alle  $N_p$ , figureranno tutte le componenti ortogonali al piano; se poi la tangente al meridiano nella zona di vincolo è verticale, detto equilibrio globale ci assicura che la somma di tutte le azioni è uguale a zero, il che

implica la presenza di valori discordi di  $N_p$ . Come conseguenza, una parte

della membrana, lungo i paralleli, sarà in compressione ed una parte in trazione; quest'ultima provoca lesioni trasformando la cupola in una calotta sorretta da una serie di archi rampanti che esercitano, quindi, una spinta notevole sul tamburo d'imposta.

Come determinare  $N_p$  ?

Si consideri, nell'intorno del punto  $P$  (fig. 16), un elementino della membrana di dimensioni infinitesime su cui agiscono

$$F \cdot d_l m \cdot d_l p \text{ (con } F \text{ forza esterna attiva sull'unità di superficie)}$$

$$N_m \cdot d_l p \text{ e } N_p \cdot d_l m \text{ reazioni vincolari}$$

Tutte, in qualità di forze esterne, appariranno nello studio dell'equilibrio indefinito consentendo, così, di imporre una relazione nell'unica incognita  $N_p(\theta)$ . Osservando le figure 17 e 18, si imponga l'equilibrio lungo la normale  $n$ :

Fig.17

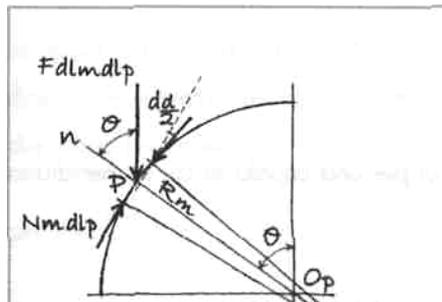
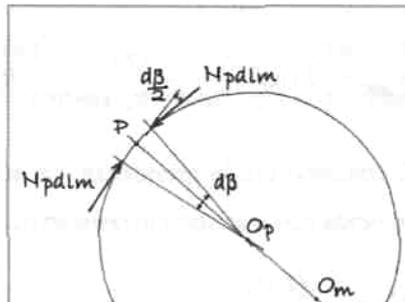


Fig.18



$$- F d_l m d_l p \cos \theta + 2 N_m d_l p \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} + 2 N_p d_l m \operatorname{sen} \frac{d\beta}{2} = 0$$

$$N_p = \left( F \cos \theta - \frac{N_m}{R_m} \right) \cdot R_p$$

$$N_{p(\theta)} = \left( F \cos \theta - \frac{Q}{2\pi R_p R_m \operatorname{sen}^2 \theta} \right) \cdot R_p \quad \text{a meno di infinitesimi superiori,}$$

coincidono con  $\frac{d\alpha}{2}$  e  $\frac{d\beta}{2}$

$$\frac{N_m}{d_l m} d\alpha + \frac{N_p}{d_l p} d\beta = F \cos \theta$$

ricordando che

$$d_l m = R_m d\alpha$$

$$d_l p = R_p d\beta$$

si ottiene

$$\frac{N_m}{R_m} + \frac{N_p}{R_p} = F \cos \theta$$

da cui

$$N_p = \left( F \cos \theta - \frac{N_m}{R_m} \right) \cdot R_p$$

$$N_{p(\theta)} = \left( F \cos \theta - \frac{Q}{2\pi R_p R_m \sin^2 \theta} \right) \cdot R_p$$

Si calcolino ora le grandezze  $N_m$  ed  $N_p$  per una cupola in cui la meridiana coincide con una semicirconferenza

$$N_m = \frac{Q(\theta)}{2\pi R \sin^2 \theta}$$

$$N_p = \left( F \cos \theta - \frac{N_m}{R} \right) \cdot R$$

per peso proprio uniforme (spessore costante), si ottiene

$$N_m = \frac{\gamma s R}{1 + \cos \theta}$$

inoltre, nel caso in esame

$$F = q = \gamma s \quad (\text{peso proprio per unità di superficie})$$

di conseguenza

$$N_p = R q \cos \theta - \frac{\gamma s R}{1 + \cos \theta} = R \left( \gamma s \cos \theta - \frac{\gamma s}{1 + \cos \theta} \right) = R \gamma s \left( \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right)$$

valida per cupole con superficie sferica, spessore costante e considerando solo il peso proprio.

Analizzando le due espressioni trovate:

$$N_m = \frac{\gamma s R}{1 + \cos \theta}$$

$$N_p = R \gamma s \left( \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right)$$

e tenendo conto che, nel caso in esame, R ed s sono costanti si avrà per  $\theta=0$

$$N_m = \frac{\gamma s R}{2} \quad N_p = \frac{R \gamma s}{2} \quad N_m = N_p ;$$

in chiave le azioni di compressione radiale sono uguali a quelle lungo il meridiano: una situazione quasi perfetta con compressione sia lungo i meridiani che lungo i paralleli;

per  $\theta = \frac{\pi}{2}$

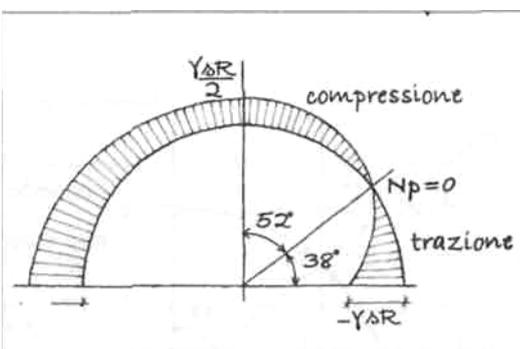
$$N_m = \gamma s R \quad N_p = -R \gamma s ;$$

all'imposta, in modulo  $N_p$  ha lo stesso valore di  $N_m$ , però mentre quest'ultimo è di compressione,  $N_p$  risulta di trazione il cui valore non può trascurarsi. Fortunatamente le cupole sono strutture costruite sempre con particolare attenzione e cura nei materiali impiegati, diversamente sarebbero tutte lesionate a causa di questo stato tensionale poco gradita dalla muratura.

Passando da un valore di  $N_p$  positivo in chiave ad un valore negativo all'imposta, vi sarà necessariamente un punto in cui  $N_p$  si annulla e si passa da uno stato di compressione ad uno di trazione; non potendo essere nulli gli altri parametri,  $N_p$  risulterà nullo quando:

$$\cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} = 0 \quad (\text{con } \theta \text{ pari a circa } 52^\circ, \text{ la relazione è verificata})$$

La figura 19 mostra il diagramma sia di  $N_m$  che di  $N_p$  relativo ad una cupola emisferica di cui si considera solo il peso proprio; naturalmente con un  $q$  (quota d'imposta) inferiore ai  $50^\circ$  cupola ribassata, si avrà una situazione tensionale di sola compressione, con spinte non indifferenti che possono mettere in crisi il tamburo sottostante. **Fig.19**



Viceversa, con una cupola a tutto sesto è essa stessa ad entrare in crisi per l'insorgere di fessurazioni verso l'imposta.

Nelle parti lesionate il comportamento a membrana non ha possibilità

d'essere e se non si provvede, ad esempio con una cerchiatura, ad assorbire la trazione, il sistema strutturale d'origine si trasforma in una cupola ribassata sorretta da tanti archi rampanti (elementi murari tra le diverse lesioni). La mancanza di eventuali assorbitori di trazione lungo i paralleli, può determinare un comportamento della cupola ad archi e di questo gli antichi costruttori erano ben consci se calcolavano la cupola come una successione di archi, evitando anche l'insorgenza delle lesioni con opportune aperture nella parte bassa.

### Calcolo di $N_p$ in funzione di un carico accidentale (Neve)

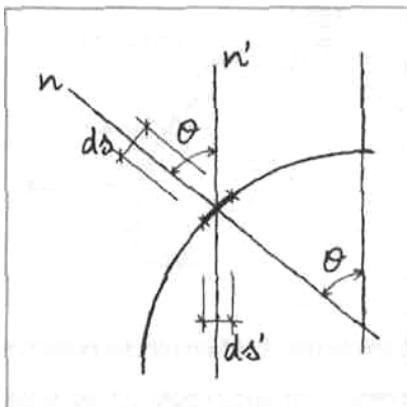
Sin qui si è fatto riferimento al solo peso proprio; si analizzi ora come viene influenzato il valore di  $N_p$  considerando il carico accidentale dovuto, ad esempio, alla neve. Indicando con  $p$  l'intensità del carico sull'unità di proiezione della superficie su un piano orizzontale e riprendendo l'espressione generale (sempre considerando una superficie sferica e la simmetria dei carichi), per  $N_m$  si aveva:

$$N_m = \frac{p R}{2}$$

mentre

$$N_p = R \cdot \left( F \cos \theta - \frac{N_m}{R} \right)$$

Fig.20



Facendo riferimento alla fig. 20,  $F$  può essere espressa in termini di  $p$

$$F s = p s'$$

$$F = \frac{p s'}{s} = \frac{p s \cos \theta}{s} = p \cos \theta$$

Quindi

$$N_p = R \cdot \left( p \cos\theta \cos\theta - \frac{N_m}{R} \right) = R \cdot \left( p \cos^2\theta - \frac{p R}{2R} \right) = \frac{R_p}{2} \cdot (2\cos^2\theta - 1) =$$

$$= \frac{R_p}{2} \cdot (\cos^2\theta + \cos^2\theta - 1) = \frac{R_p}{2} \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{R_p}{2} \cdot (\cos 2\theta)$$

$$\text{con } \theta=0 \quad N_p = \frac{R_p}{2}$$

$$\text{con } \theta = \frac{\pi}{2} \quad N_p = -\frac{R_p}{2}$$

Il diagramma polare che ne consegue è quello di figura 21 con andamento costante per gli  $N_m$  e passaggio da valori positivi (compressione) a valori negativi (trazione) per gli  $N_p$  che si annullano per  $\theta=45^\circ$ .

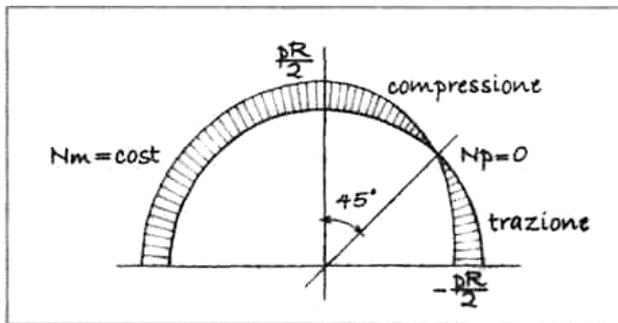


Fig.21

Si tratta, comunque, di effetti modesti rispetto alle sollecitazioni dovute al peso proprio ed ai carichi permanenti, soprattutto per le cupole in muratura per le quali rappresentano sempre la parte predominante e immancabile delle cause sollecitanti.

### Consolidamento di una cupola

L'analisi teorica effettuata sulla **membrana di rivoluzione** rappresenta abbastanza bene ciò che accade realmente nelle cupole di rivoluzione che, si badi, rappresentano quasi la totalità di queste strutture architettoniche emergenti. **Le cupole a pianta ellittica o policentrica, hanno un comportamento in cui gli impegni flessionali sono rilevanti su tutta l'estensione della cupola medesima, al contrario di quello che accade nelle cupole di rivoluzione, dove le sollecitazioni complesse si manifestano solo in corrispondenza degli appoggi.**

Alla luce di queste considerazioni che cosa si può dedurre dallo studio teorico svolto nei paragrafi precedenti?

In sintesi è possibile affermare che:

le sollecitazioni lungo i meridiani, sempre di compressione, danno luogo a stati tensionali di modesta entità, peraltro ampiamente garantiti dalla qualità costruttiva delle cupole stesse; lungo i paralleli, nella parte bassa, prossima agli appoggi e per cupole non eccessivamente ribassate, si instaurano trazioni pericolose per una muratura anche di buona qualità, la cui distribuzione ed intensità dipendono anche dalla curva meridiana.

Conseguenza di quest'ultima constatazione è che la parte bassa della cupola può lesionarsi lungo linee che seguono i meridiani dando luogo così, a una nuova struttura suscettibile di ulteriore interpretazione: cupola ribassata sede di compressione lungo i meridiani e i paralleli sorretta da un insieme di archi rampanti a doppia curvatura spingenti sul tamburo. E' chiaro che, se non sono stati previsti opportuni contrafforti atti ad assorbire le rilevanti spinte, non vi è alcuna possibilità per il tamburo di resistere alle trazioni, altrettanto rilevanti, indotte dalle azioni centrifughe di cui sopra. Inoltre, la diffusa presenza di aperture nella parte bassa delle cupole può essere intesa come una voluta delimitazione degli archi rampanti, in prossimità dei quali venivano sistemati i contrafforti più o meno elegantemente conformati a volute.

Premesso ciò è intuitivo comprendere come la stabilità delle cupole possa essere facilmente assicurata ricorrendo a cerchiature poste nella parte in cui i paralleli sono soggetti a sforzi di trazione, permettendo alla struttura di possedere un convincente e sicuro comportamento a membrana. In tal modo, infatti, la capacità di resistere a trazione viene così garantita dall'armatura. Con interventi di questo tipo la cupola potrebbe essere anche impostata su un tamburo privo di contrafforti o cerchiature proprie.

Che tipo di intervento è possibile ipotizzare per una cupola emisferica, ad esempio con raggio pari a 20 m, sottoposta essenzialmente al suo peso proprio che presenti, a ragione, delle lesioni poste ad un interasse di circa 5-6. Si considerino, per ipotesi, lesioni dovute esclusivamente allo sforzo  $N_p$  (vedi paragrafo precedente) localizzate lungo i meridiani con andamento dal basso verso l'alto, per uno sviluppo compreso tra l'imposta ed un angolo di circa trenta gradi sull'orizzontale; inoltre, l'ordine di grandezza dello stato tensionale all'imposta, lungo i meridiani, è dato da:

$$\sigma = \gamma R$$

$$\sigma = 2,00 \text{ t/m}^3 \cdot 20 \text{ m} = 40 \text{ t/m}^2 = 4 \text{ Kg/cm}^2$$

Ragioniamo sulle possibili soluzioni al quesito posto.

Si potrebbe pensare di inserire dei "tiranti radiali", sebbene questo significhi

preoccuparsi della stabilità del tamburo e non della rimozione della causa originaria del dissesto; è come se si accettasse di non poter far nulla per contrastare lo sforzo di trazione  $N_p$ . Tuttavia si tratta di una soluzione molto artificiosa anche per il numero di tiranti da posizionare, abbastanza elevato per evitare eccessive concentrazioni di tensioni.

Della stessa natura anche l'eventuale possibilità, di difficile applicazione, di realizzare dei contrafforti al tamburo a sostegno degli archi rampanti formati per effetto delle lesioni; anche in questo caso, infatti, la causa originaria del dissesto non viene rimossa.

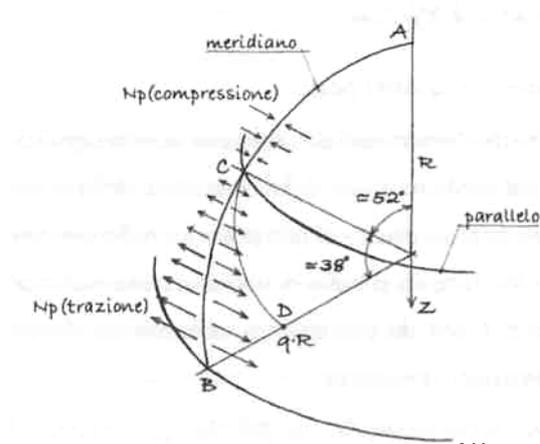
Da un punto di vista espressamente teorico-concettuale, si potrebbe pensare di deviare l'andamento della spinta appesantendo la base della cupola con materiale aggiuntivo; intervento, per ovvie ragioni, praticamente impossibile da realizzarsi nel consolidamento.

L'intervento del "cuci e scuci" per ripristinare la continuità muraria nella lesione non è risolutivo e ha, come inevitabile conseguenza, quella di spostare il fenomeno lesionativo in altra zona, spesso contigua a quella risarcita.

In definitiva, quindi, non esiste altro sistema altrettanto valido come quello della cerchiatura, un intervento spesso attuato in passato che ha anche il merito di risultare invisibile rimanendo nascosto sotto le tegole della copertura.

Per la cupola in questione si ipotizzi uno spessore pari a  $50\text{ cm}$  ed un  $y = 2,00\text{ t/m}^1$ , si avrà un  $q = 1,00\text{ t/m}$ .

Per dimensionare la cerchiatura che deve contrastare le sollecitazioni di trazione, è indispensabile calcolare il valore della risultante di tutti gli sforzi di trazione presenti che, come detto, si esercitano lungo i paralleli (lesioni lungo i meridiani).



**Fig.22**

La parte di meridiano interessata da uno sforzo di trazione  $N_p$  è quella compresa tra  $52^\circ < \vartheta < 90^\circ$  (fig. 22), dove assume rispettivamente i valori assoluti  $N_p=0$  (minimo),  $N_p=qR$  (massimo). Integrando

l'espressione di  $Np$  in quel tratto è possibile determinare la risultante di trazione, causa delle fratture presenti nella cupola.

In conclusione, il tratto di meridiano sul quale  $Np$  è di trazione risulta essere di poco superiore ad  $1/3$ , quindi:

$$\ell^{(AB)} = \frac{\pi R}{2} = \frac{3,14 \cdot 20 \text{ m}}{2} = 31,4 \text{ m}$$

(lunghezza meridiana)

$$\ell^{(CB)} = 3,14 \text{ m} \cdot \frac{38}{90} = 13,26 \text{ m}$$

(lunghezza del tratto di meridiano interessato da trazione)

$$F^{(Tr)} \cong \frac{1}{2}(q R) \ell^{(CB)} = \frac{1}{2}(1,00 \text{ t/m}^2 \cdot 20 \text{ m}) \cdot 13,26 \text{ m} \cong 133 \text{ t}$$

(forza totale di trazione)

Nell'ipotesi di voler inserire una sola cerchiatura, non corretta data la notevole forza di trazione da assorbire, si supponga di adottare un cavo d'acciaio il cui raggio della sezione sarà così calcolato:

per  $F = 133 \text{ t}$

$$A = \frac{133 \text{ t}}{10 \text{ t/cm}^2} = 13,3 \text{ cm}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{13,3 \text{ cm}^2}{3,14}} = 2,06 \text{ cm}$$

$$d = 2 \cdot 2,06 \text{ cm} = 4,12 \text{ cm} \quad (\text{o } 45 \text{ mm})$$

L'effettiva posa in opera di un cavo così dimensionato, determina l'insorgere di alcuni problemi, primo fra tutti la lunghezza stessa del cavo, poi il fatto di doverlo portare in tensione e, per evitare che si verifichino scivolamenti verso l'alto, la necessità di creare una sede apposita (incasso). A tal proposito, quanto vale la pressione esercitata dal cavo d'acciaio sulla muratura, ovvero la forza per unità di lunghezza di parallelo che si esercita sulla cupola una volta che il cavo è stato tirato a  $133 \text{ t}$

Il cavo, per assorbire gli sforzi di trazione, svolge un'azione di compressione radiale della struttura, come mostrato in figura 23; per calcolare questa compressione si faccia riferimento a metà cerchio di figura 24.

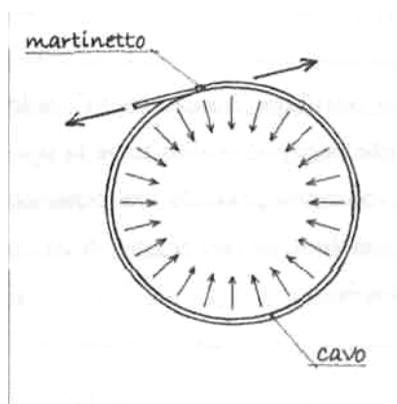


Fig.23

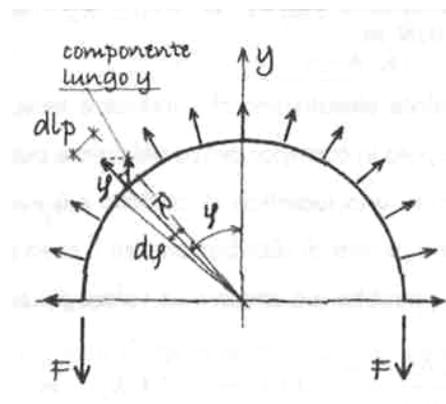


Fig.24

Ipotizzando una forza uniforme, presente cioè in ogni punto del cerchio, si avrà sia da un lato che dall'altro la medesima forza  $F$  che tira il cavo; naturalmente per l'equilibrio la cupola reagirà con delle forze unitarie dirette verso il suo esterno. Supponendo di mettere in equilibrio il cavo lungo la direzione  $y$  si ottiene:

$$-2F + 2 \int_0^{\pi/2} p \cos\varphi R d\varphi = 0$$

$$2p R \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2F$$

$$pR[\sin\varphi]_0^{\pi/2} = F$$

$$p = \frac{F}{R}$$

quindi con  $F=133 t$  ed  $R=20 m$  si ottiene

$$p = \frac{133 t}{20 m} = 6,65 t / m$$

(forza che stringe radialmente la cupola nella zona del cavo per ogni metro di parallelo).

Infine, ipotizzando una superficie di contatto allargata tra cavo e cupola pari ad

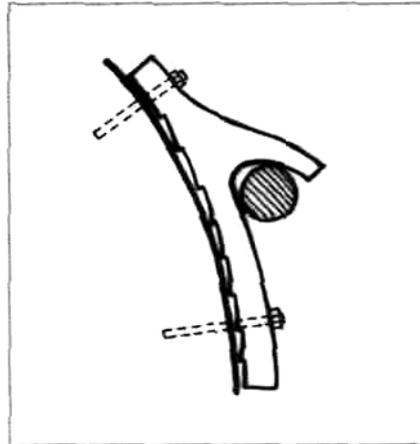
1 cm, si avrà:

$$0,01 m \cdot 1 m = 0,01 m^2 \text{ (sup. contatto per ogni metro di cavo)}$$

$$\frac{6,65 t / m}{0,01 m} = 665 t / m^2 = 66,5 Kg / cm^2$$

valore elevatissimo che induce a temere un possibile "tranciamento" della cupola in corrispondenza del cavo e quindi alla necessità di distribuire lo sforzo su una superficie di contatto più estesa, soluzione possibile interponendo una piastra di distribuzione tra il cavo e la cupola. Con una piastra di 20 cm si potrebbe già ottenere un valore più accettabile:

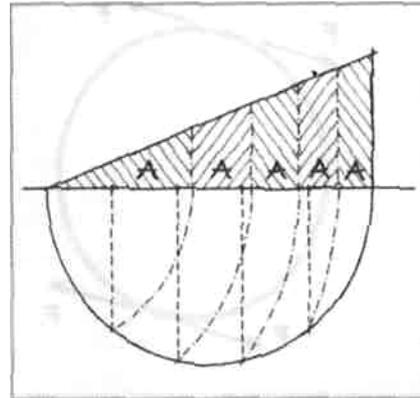
$$\frac{6,65 t / m}{0,2 m} = 33 t / m^2 = 3,3 Kg / cm^2$$



**Fig.25**

La piastra così definita, appositamente sagomata per accogliere il cavo (fig. 25), potrebbe essere realizzata in vari pezzi (conci), ad esempio di un metro di lunghezza, per favorirne la posa in opera; inoltre si consiglia una dentellatura di contatto per favorire l'aggrappaggio alla muratura o, per maggior sicurezza, la piastra può essere fissata tramite perni d'ancoraggio.

Si ribadisce che posizionare esclusivamente un unico cavo per assorbire tutta la trazione della cupola è certamente non corretto per la concentrazione di tensioni che ne deriva; inoltre l'effetto cerchiante viene ad esercitarsi eccessivamente in un'area limitata, mentre la restante parte ne rimane sprovvista. Per la natura del materiale muratura e per l'effettiva distribuzione degli sforzi di trazione, è opportuno diffondere quanto possibile l'incatenamento in tutta la zona tesa della cupola. Detta cerchiatura, messa in pretensione, dovrà essere più efficace nella parte d'imposta, ma comunque presente in tutta la zona tesa, fino a scomparire dove  $N_p$  si annulla.



**Fig.26**

E' evidente la necessità di ricorrere ad un compromesso, cioè intervenire con una ragionevole discretizzazione dell'intervento: con passo costante, utilizzando differenti sezioni dei cavi, nel rispetto dei differenti impegni richiesti, oppure impiegando cavi con diametro costante posizionati secondo passi differenziati (utile a questa scopo potrebbe essere anche l'uso di costruzioni grafiche atte a dividere il diagramma triangolare di  $Np$  in parti di uguale area), (fig. 26)

Naturalmente nella scelta dello schema di progetto intervengono altri fattori a sancirne la soluzione finale, primo fra tutti quello della fattibilità pratica dell'esecuzione.

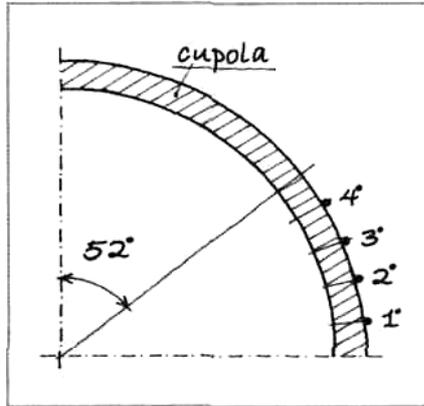


Fig.27

Ritornando all'esempio in questione, nell'ipotesi di catene posizionate a passo costante, saranno le dimensioni trasversali del cavo a ridursi man mano che si procede dall'imposta verso l'alto, come mostrato in figura 27.

Una volta deciso che tipo di intervento adottare, si dovrà scegliere se affidare tutta la forza  $F$  di trazione ai cavi (pretensione

totale), oppure se affidarne solo una quota parte (pretensione parziale) o nulla, se si ritiene che questi debbano svolgere esclusivamente una funzione di presidio, per intervenire solo se e quando la situazione lo richiedesse. In realtà si consiglia di effettuare una pretensione dei cavi affidando loro almeno la metà della forza totale calcolata. Ma come si realizza materialmente un'operazione di tiraggio dei cavi?

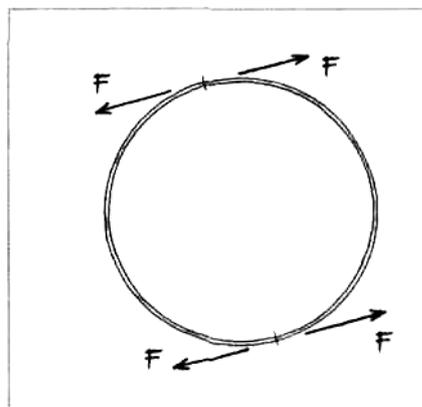


Fig.28.

Con un solo martinetto e quindi con un unico punto di tiro, la situazione che si presenta è quella indicata" in figura 8.28, con lo sforzo di trazione, a causa dell'attrito, diminuente dalla zona del martinetto, fino ad annullarsi in zone non molto lontane da questo. Con due martinetti di tiro il fenomeno si ripropone anche se in proporzioni minori (fig. 29). La soluzione migliore è quella di utilizzare più martinetti agenti in contemporanea con un sistema che metta in parallelo i martinetti stessi (fig. 30).

Fig.29

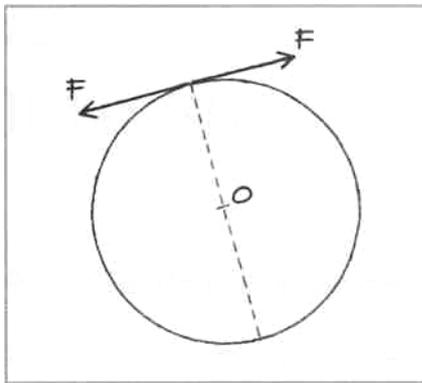
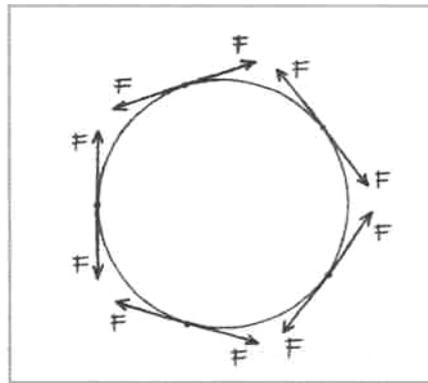


Fig.30



In conclusione, si vuole ricordare che un intervento di cerchiatura deve essere realizzato solo se, dopo aver eseguito tutte le verifiche del caso, la stabilità risultasse garantita con un valore modesto del coefficiente di sicurezza; questo perché, a meno di fenomeni di manomissione violenta (diretti o indiretti), molto probabilmente la cupola, proprio attraverso la formazione delle lesioni, potrebbe aver trovato un nuovo equilibrio che, se sufficientemente garantito, non necessita di interventi di consolidamento, nonostante la presenza di vistose lesioni.

Nelle lezioni successive , dopo aver introdotto e studiato i materiali compositi con l'uso di fibre, vedremo il consolidamento di una cupola con l'uso degli stessi.